УДК 621.391;519.72

ПРИМЕНЕНИЕ РЕШЕТЧАТЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ УЗКОПОЛОСНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

В.С. Аврамчук, Е.М. Яковлева

Томский политехнический университет
E-mail: AvramchukVS@mail.ru

Показана возможность использования решетчатых периодических функций при обработке узкополосных сигналов методами дискретного преобразования Фурье, мгновенной спектральной плотности и синхронного детектирования, обеспечивающая сокращение количества обрабатываемых отсчетов.

Задача определения спектрального состава: амплитуд, частот и фаз составляющих периодического сигнала – встречается при анализе многочастотных колебаний в системах управления [1], в задачах распознавания многочастотных сигналов в цифровых каналах связи [2], при разработке и эксплуатации систем диагностирования электротехнических и электромеханических устройств [3].

В настоящее время в качестве математического аппарата цифрового спектрального анализа широко используют методы дискретного преобразования Фурье, часто в виде быстрого преобразования Фурье, мгновенной спектральной плотности и синхронного детектирования. Однако реализация классических алгоритмов данных методов требует больших вычислительных затрат, что существенно усложняет техническую реализацию устройств и ограничивает их быстродействие. Стремление уменьшить объем вычислений стимулировало развитие новых алгоритмов и методов спектрального оценивания, направленных на устранение указанных недостатков.

В настоящей работе рассматривается возможность использования в качестве опорных, взамен дискретизируемых гармонических функций вида $\sin(\omega t)$ и $\cos(\omega t)$, решетчатых функций $z_{\sin}(t_k)=\sin(2\pi f_j t_k)=\sin(\omega_j t_k)$ и $z_{\cos}(t_k)=\cos(2\pi f_j t_k)=\cos(\omega_j t_k)$, принимающих на своем периоде строго фиксированное количество (M) значений в определенные моменты времени t_k, когда:

$$\omega_j t_k = 0\frac{2\pi}{M},\quad 1\frac{2\pi}{M},\quad 2\frac{2\pi}{M},\cdots,(M-1)\frac{2\pi}{M},\qquad (1)$$

при различных значениях круговых частот опорного сигнала $\omega_j=2\pi f_j$, где f – частота опорного сигнала (Гц), j – порядковый номер спектральной составляющей.

Рассмотрим особенности использования решетчатых функций в спектральном анализе периодических сигналов методами:

- мгновенной спектральной плотности (МСП) [1];
- синхронного детектирования (СД) [5];
- дискретного преобразования Фурье (ДПФ) [4].

Мгновенная спектральная плотность

Мгновенные спектральные плотности из [1] позволяют найти частоту той или иной составляющей сигнала по экстремуму $S(\omega)$:

$$\left.\begin{aligned} S_1(\omega) &= \int_0^T f(t)\sin(\omega t)dt;\\ S_2(\omega) &= \int_0^T f(t)\cos(\omega t)dt;\\ S(\omega) &= \sqrt{S_1^2(\omega)+S_2^2(\omega)}\,, \end{aligned}\right\},\qquad (2)$$

где T – период сигнала, $f(t)$ – анализируемый сигнал, ω – круговая частота.

Анализ ведется в определенном диапазоне частот $[\omega_{НАЧ},...,\omega_{ПРЕД}]$.

При анализе дискретизированного сигнала, представленного мгновенными цифровыми отсчетами, формулы (2) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} S_1(\omega_j) &= \sum_{i=0}^{N_И-1} f(t_i)\sin(\omega_j\, t_i);\\ S_2(\omega_j) &= \sum_{i=0}^{N_И-1} f(t_i)\cos(\omega_j\, t_i);\\ S(\omega_j) &= \sqrt{S_1^2(\omega_j)+S_2^2(\omega_j)}\,, \end{aligned}\right\},\qquad (3)$$

где $\omega_{НАЧ}\le\omega_j\le\omega_{ПРЕД}$, $N_И$ – количество отсчетов на интервале дискретизации $N_И=T_И/\Delta t$, $T_И$ и Δt – интервал и шаг дискретизации, $f(t_i)$ – мгновенное значение анализируемого периодического сигнала, j – порядковый номер спектральной составляющей, t_i – дискретный момент времени.

Зафиксировав частоты, на которых наблюдается экстремум $S(\omega)$, можно провести оценку спектрального портрета анализируемого периодического сигнала. По значению $S(\omega_j)$ для каждой круговой частоты $\omega_j=2\pi f_j$ можно определить амплитуду соответствующей спектральной составляющей [1]:

$$A_{mj} = 2[S(\omega_j)]/N_И\,.\qquad (4)$$

Фазовый угол выявленной спектральной составляющей рассчитывается по формуле [1]:

$$\psi_j = \mathrm{arctg}[S_2(\omega)/S_1(\omega)]. \qquad (5)$$

По рассчитанным значениям A_{mj}, ω_j и φ_j судят о спектральном портрете анализируемого сигнала $f(t)$. Приведенные выше формулы (4) и (5) использованы в [1] для анализа спектрального состава сигнала в нелинейных системах автоматического регулирования.

При переходе к решетчатым периодическим функциям формулы (3) принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} S_1(\omega_j) &= \frac{2}{N_M}\sum_{k=0}^{N_M-1} f(t_k)\sin(\omega_j\, t_k); \\ S_2(\omega_j) &= \frac{2}{N_M}\sum_{k=0}^{N_M-1} f(t_k)\cos(\omega_j\, t_k); \\ S(\omega_j) &= \sqrt{S_1^2(\omega_j) + S_2^2(\omega_j)}\,, \end{aligned}\right\},$$

где $S(\omega_j)$ – мгновенная спектральная плотность на определенной частоте опорного сигнала, N_M – количество точек на периоде анализируемого сигнала, попавших в моменты времени t_k при определенном M. При отсутствии в дискретизированом сигнале требуемых отсчетов из сигнала выбирают отсчеты, максимально приближенные к искомым моментам времени.

Амплитудное значение j-ой гармонической составляющей рассчитывается по формуле:

$$A_{mj} = S(\omega_j).$$

Фазовый угол j-ой гармонической составляющей рассчитывается по формуле (5). Для иллюстрации работоспособности рассматриваемого способа спектрального анализа приведем расчет тестового примера с достаточно близкими друг к другу частотами, табл. 1, при шаге дискретизации $\Delta t=10^{-4}$ с и $\omega_{НАЧ}=2\pi 50$ рад/с, $\omega_{ПРЕД}=2\pi 51$ рад/с, $\Delta\omega=2\pi 0{,}1$ рад/с. Массив цифровых отсчетов сформирован на периоде сигнала $T=10$ с.

Таблица 1. *Исходные данные тестового примера*

№ гармонической составляющей	Частота $f=\omega/2\pi$, Гц	Амплитудное значение A_m, В	Фазовый угол φ, градус
1	50,0	200,0	45,0
2	50,1	200,5	83,0
3	50,2	200,3	0,0

Результаты вычислений тестового примера при различных значениях M представлены в табл. 2.

По результатам экспериментов можно утверждать, что рассматриваемый способ обеспечивает сокращение количества обрабатываемых отсчетов, и соответственно сокращает временные затраты на расчет спектрального портрета.

Синхронный детектор

Известный принцип синхронного детектирования сводится к умножению анализируемого сигнала $a(t)$ на опорный сигнал $b_{on}(t)$ той или иной формы, частоты и фазы (рис. 1). Среднее значение выходного сигнала $C(t)$ синхронного детектора четко зависит от амплитуды частотной составляющей сигнала $a(t)$, причем при фазовой подстройке опорного сигнала удается выделить соответствующую составляющую сигнала практически без ослабления [5].

Таблица 2. *Результаты расчета тестового примера*

Способ	Кол-во отсчетов, N	Частота $f=\omega/2\pi$, Гц	Амплитудное значение A_m, В	Фазовый угол φ, град.
Классический МСП	100000	50,0	200,0000	45,0000
		50,1	200,5000	83,0000
		50,2	200,3000	0,0000
при M=4	2000	50,0	200,0000	45,0000
	2004	50,1	200,5000	83,0000
	2008	50,2	200,3000	0,0000
при M=5	2500	50,0	200,0000	45,0000
	2505	50,1	200,5000	83,0000
	2510	50,2	200,3000	0,0000
при M=6	3000	50,0	200,000	45,0000
	3006	50,1	200,5000	83,0000
	3012	50,2	200,3000	0,0000
при M=7	3500	50,0	200,0021	44,7366
	3507	50,1	200,498	82,9999
	3514	50,2	200,2954	0,0000
при M=8	4000	50,0	200,0000	45,0000
	4008	50,1	200,5000	83,0000
	4016	50,2	200,3000	0,0000

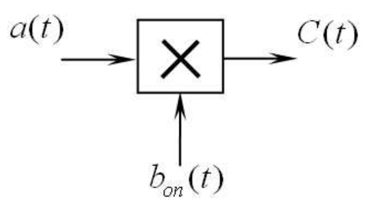


Рис. 1. *Синхронный детектор*

В качестве опорного (зондирующего) сигнала рассмотрим решетчатый периодический сигнал вида $b_{on}(t_k)=\sin(2\pi f_{on}t_k+\psi_{on})=\sin(\omega_{on}t_k+\psi_{on})$, принимающий на своем периоде фиксированное количество отличных от нуля значений:

$$b_{on}(t_k) = \begin{cases} A_{on} & \text{если} \quad (\omega_{on}\,t_k + \psi_{on}) = \pi/2; \\ -A_{on} & \text{если} \quad (\omega_{on}\,t_k + \psi_{on}) = 3\pi/2; \\ 0 & \text{если} \quad (\omega_{on}\,t_k + \psi_{on}) \neq \pi/2, \\ & \qquad\qquad (\omega_{on}\,t_k + \psi_{on}) = 3\pi/2. \end{cases}$$

Опорный сигнал многократно сдвигают по фазе относительно анализируемого сигнала $a(t)$ с шагом $\Delta\psi$ от 0 до 180°, причем частота опорного (зондирующего) сигнала ω_{on} изменяется в пределах $\omega_{НАЧ}\leq\omega_{on}\leq\omega_{ПРЕД}$. Находят точки $(\omega_{on}t_k+\psi_{on})$, в которых $b_{on}(t_k)=A_{on}$ или $-A_{on}$ при различных частотах опорного сигнала $\omega_{on}=2\pi f_{on}$ и фазах опорного сигнала ψ_{on}, перемножают значения анализируемого сигнала и опорного в точках $b_{on}(t_k)$, суммируют полученные значения на периоде анализируемого сигнала, рассчитывают постоянную составляющую, причем из найденных значений постоянной составляющей на

каждой частоте опорного сигнала выбирают максимальное значение C_{0i} и соответствующее ему значение фазового угла опорного сигнала. Амплитудное значение выявленной гармонической составляющей рассчитывают по формуле:

$$A_{mi} = 2(C_{0i} / A_{on}).$$

Среднее значение выходного сигнала $C(t)$ будет максимально только при совпадении частоты и фазового угла опорного сигнала с частотой и фазовым углом реально присутствующей в анализируемом сигнале гармонической составляющей. Тогда, зафиксировав положение опорного сигнала относительно анализируемого сигнала при $C_{ср.макс}$, можно определить фазу анализируемого сигнала. При отсутствии в дискретизированом сигнале требуемых отсчетов, из сигнала выбирают отсчеты, максимально приближенные к искомым моментам времени.

В табл. 3 представлены результаты расчета приведенного выше тестового примера, табл. 1. Шаг перебора по частоте Δf_{on}=0,1 Гц, по фазовому углу $\Delta\psi$=1°.

Таблица 3. *Результаты расчета тестового примера*

Способ	Кол-во отсчетов, N	Частота $f=\omega/2\pi$, Гц	Амплитудное значение A_m, В	Фазовый угол φ, град.
Классический	10^6	50,0	200,0000	45,0
		50,1	200,5000	83,0
		50,2	200,3000	0,0
Предлагаемый	1000	50,0	200,0000	45,0
	1002	50,1	200,4790	83,0
	1004	50,2	200,2920	0,0

На рис. 2 представлен случай, когда анализируемый сигнал близок к синусоидальному, а опорный сигнал имеет единичную амплитуду при частоте, близкой к частоте основной гармоники анализируемого сигнала ($T_{on} \cong T_C$). Тогда среднее значение выходного сигнала при опорном сигнале $b_{on1}(t)$ будет заметно больше, чем при опорном сигнале b_{on2}

$$C_{cp1} > C_{cp2},$$

что объясняется несовпадением фазы опорного сигнала ψ_2 с фазой анализируемого сигнала (в конкретном случае она равна нулю), тогда как для опорного сигнала $b_{on1}(t)$ ψ_1=0.

На рис. 3 рассмотрен случай, когда опорные сигналы отличаются друг от друга по частоте, причем $T_{on1}=T_C$, $T_{on2}>T_C$. Легко видеть, что средние значения выходного сигнала будут заметно отличаться друг от друга. Этот факт может быть использован при контроле частоты сигнала $a(t)$ [8].

Отметим, что постоянная составляющая выходного сигнала C_{cp} будет максимальна при выполнении двух условий, приведенных на рис. 2 и 3, если совпали:

- частоты опорного сигнала и основной составляющей анализируемого сигнала;
- фазовые углы гармонической составляющей и опорного сигнала.

По результатам вычислительных экспериментов видим, что применение решетчатых периодических функций дает значительное уменьшение числа обрабатываемых отсчетов, то есть обеспечивается существенное уменьшение временных затрат.

Дискретное преобразование Фурье

Формулы дискретного преобразования Фурье хорошо известны [4]. При переходе к решетчатым функциям будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{N_M}\sum_{j=0}^{N_M-1} f(t_j)\cos(2\pi k f_1 t_j); \\ B_k &= \frac{2}{N_M}\sum_{j=0}^{N_M-1} f(t_j)\sin(2\pi k f_1 t_j); \\ A_{mk} &= \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \\ \psi_k &= \operatorname{arctg}(A_k / B_k), \end{aligned}\right\},$$

где $f_1=1/T$ – основная частота сигнала, T – период анализируемого сигнала, k – порядковый номер спектральной (гармонической) составляющей анализируемого сигнала.

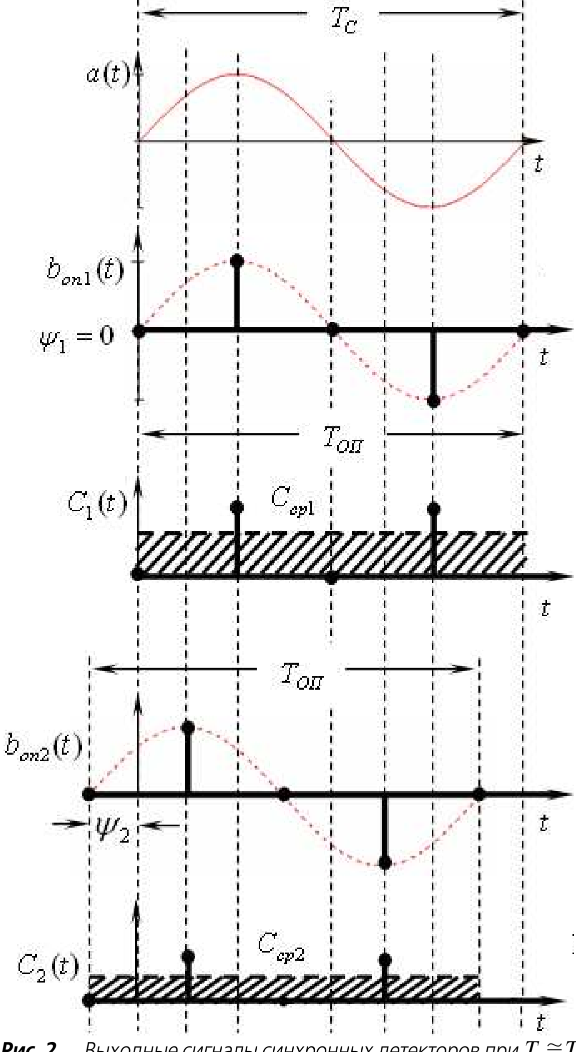


Рис. 2. *Выходные сигналы синхронных детекторов при $T_{on} \cong T_C$*

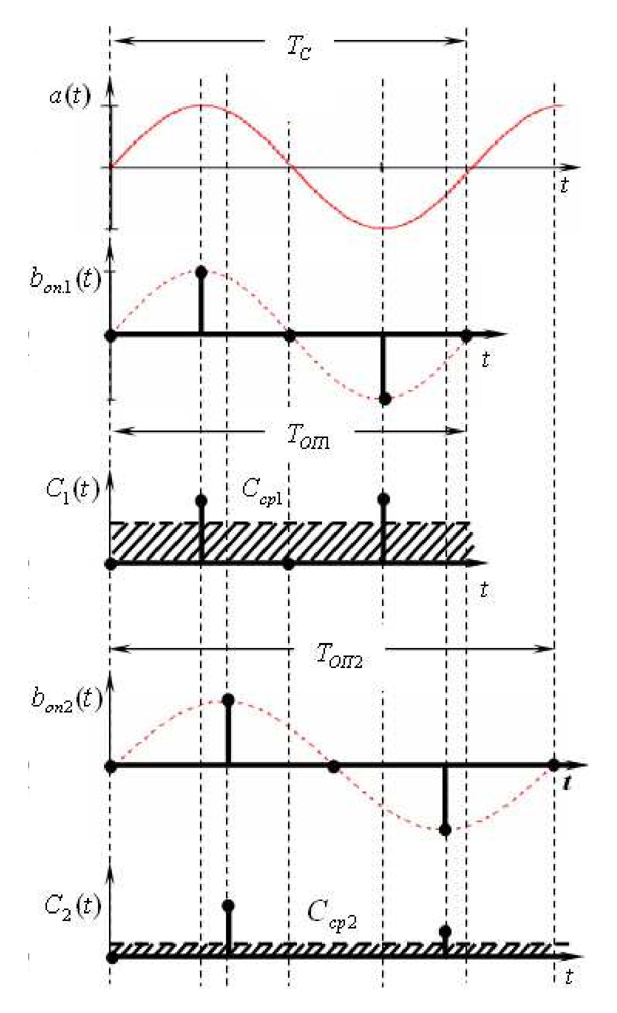


Рис. 3. *Выходные сигналы синхронных детекторов при $T_{оп1}=T_C$ и $T_{оп2}>T_C$*

Решетчатые периодические функции $z_{\sin}(t_j)$ и $z_{\cos}(t_j)$ принимают на своем периоде строго фиксированное количество значений в определенные моменты времени t_j (1) при различных частотах гармонического сигнала $\omega_k=k\omega_1=k2\pi f_1$, кратных основной частоте анализируемого сигнала $f_1=1/T$.

Из анализируемого сигнала выбирают только те отсчеты, которые попадают в моменты времени t_j при различных частотах $\omega_k=k\omega_1=k2\pi f_1$. Перемножение значений анализируемого сигнала и опорного осуществляется только в моменты времени t_j. Полученные значения суммируют на периоде T анализируемого сигнала и рассчитывают значения A_{mk}, ω_k и ψ_k. При отсутствии в дискретизированом сигнале требуемых отсчетов, из сигнала выбирают отсчеты, максимально приближенные к искомым моментам времени.

Работоспособность расчетных формул и достоверность получаемых результатов рассмотрим на тестовом примере, табл. 1. Результаты расчетов сведены в табл. 4.

По приведенным в табл. 4 результатам расчетов видно, что предложенный способ расчета дискретного преобразования Фурье с использованием решетчатых периодических функций дает верные результаты расчета при различном *M*.

Таблица 4. *Результаты расчета тестового примера*

Способ	Кол-во отсчетов, N	Частота $f=\omega/2\pi$, Гц	Амплитудное значение A_m, В	Фазовый угол φ, град.
Классический МСП	100000	50,0	200,0000	45,0000
		50,1	200,5000	83,0000
		50,2	200,3000	0,0000
при *M*=4	2000	50,0	200,0000	45,0000
	2004	50,1	200,5000	83,0000
	2008	50,2	200,3000	0,0000
при *M*=5	2500	50,0	200,0000	45,0000
	2505	50,1	200,5000	83,0000
	2510	50,2	200,3000	0,0000
при *M*=6	3000	50,0	200,0000	45,0000
	3006	50,1	200,5000	83,0000
	3012	50,2	200,3000	0,0000
при *M*=7	3500	50,0	200,0021	44,7366
	3507	50,1	200,4980	82,9999
	3514	50,2	200,2954	0,0000
при *M*=8	4000	50,0	200,0000	45,0000
	4008	50,1	200,5000	83,0000
	4016	50,2	200,3000	0,0000

В заключение обзора возможных путей применения решетчатых периодических функций при расчете спектральных портретов узкополосных периодических сигналов еще раз отметим существенное сокращение количества обрабатываемых отсчетов. Выбор оптимального значения *M* осуществляется экспериментальным путем при решении конкретных задач и зависит от доступного набора частот дискретизации анализируемого сигнала. Разработанные способы могут быть использованы при построении адаптивных систем управления с использованием принципа частотно-зависимой обратной связи с многочастотным узкополосным идентифицирующим воздействием.

По результатам исследований были получены патенты [6–8], отдельные вопросы использования решетчатых периодических функций частично описаны в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сидоров И.М., Тимофеев В.В. Многочастотные колебания в нелинейных системах управления. – М.: Наука, 1984. – 248 с.
2. Евсиков М.Ю. Распознавание многочастотных сигналов, передаваемых по цифровым каналам связи // Электросвязь. – 1998. – № 11. – С. 34–38.
3. Аврамчук В.С., Бацева Н.Л., Гольдштейн Е.И. и др. Функциональный контроль и диагностика электротехнических и электромеханических систем и устройств по цифровым отсчетам мгновенных значений тока и напряжения / Под ред. Е.И. Гольдштейна. – Томск: Печатная мануфактура, 2003. – 240 с.
4. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 536 с.
5. Быков С.В., Пасынков Ю.А. Использование синхронного детектора для анализа спектра периодического сигнала // Сборник научных трудов НГТУ. – 2000. – № 5(22). – С . 127–130.

6. Пат. 2229139 РФ. МКИ G01R 23/16. Способ спектрального анализа сложных несинусоидальных периодических сигналов представленных цифровыми отсчетами / В.С. Аврамчук, Е.И. Гольдштейн. Заявлено 10.12.02; Опубл. 20.05.2004, Бюл. № 14. – 10 с.: ил.
7. Пат. 2229140 РФ. МКИ G01R 23/16. Способ спектрального анализа многочастотных периодических сигналов, представленных цифровыми отсчетами / В.С. Аврамчук, Е.И. Гольдштейн. Заявлено 28.03.03; Опубл. 20.05.2004, Бюл. № 14. – 7 с.: ил.
8. Пат. 2231076 РФ. МКИ G01R 23/16. Способ определения частоты сетевого напряжения / В.С. Аврамчук, Е.И. Гольдштейн. Заявлено 02.07.03; Опубл. 20.06.2004, Бюл. № 15. – 7 с.: ил.

УДК 681.5.01